

University of Wollongong

Research Online

---

Faculty of Engineering and Information  
Sciences - Papers: Part A

Faculty of Engineering and Information  
Sciences

---

1-1-2007

## Sobre la infinitud de los numeros primos: un enfoque topologico

Marianito Rocha Rodrigo

*University of Wollongong*, [marianit@uow.edu.au](mailto:marianit@uow.edu.au)

Follow this and additional works at: <https://ro.uow.edu.au/eispapers>



Part of the [Engineering Commons](#), and the [Science and Technology Studies Commons](#)

---

Research Online is the open access institutional repository for the University of Wollongong. For further information contact the UOW Library: [research-pubs@uow.edu.au](mailto:research-pubs@uow.edu.au)

---

## Sobre la infinidad de los numeros primos: un enfoque topologico

### Abstract

Un resultado bien conocido en la teorí a elemental de números, usualmente atribuido a Euclides, dice que hay un número infinito de primos. Existen varias demostraciones de este resultado [1, 3] pero en esta nota mostraremos en detalle el enfoque ingenioso de Furstenberg [2], que utiliza conocimientos básicos de topología, por ejemplo, espacios topológicos, conjuntos abiertos y conjuntos cerrados.

### Keywords

gico, infinidad, la, topol, sobre, enfoque, un, primos, meros, n, los, de

### Disciplines

Engineering | Science and Technology Studies

### Publication Details

Rodrigo, M. Rocha. (2007). Sobre la infinidad de los numeros primos: un enfoque topologico. Miscelanea Matematica, 44 79-82.

# Sobre la infinidad de los números primos: un enfoque topológico

Marianito Rocha Rodrigo

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Río Hondo # 1

01080 México, D.F.

México

mrocha@itam.mx

Un resultado bien conocido en la teoría elemental de números, usualmente atribuido a Euclides, dice que hay un número infinito de primos. Existen varias demostraciones de este resultado [1, 3] pero en esta nota mostraremos en detalle el enfoque ingenioso de Furstenberg [2], que utiliza conocimientos básicos de topología, por ejemplo, espacios topológicos, conjuntos abiertos y conjuntos cerrados.

Sea  $X$  un conjunto no vacío. Una colección  $\mathcal{T}$  de subconjuntos de  $X$  es una *topología* en  $X$  si y sólo si  $\mathcal{T}$  satisface los siguientes axiomas:

1. El conjunto vacío  $\emptyset$  pertenece a  $\mathcal{T}$ .
2. La unión de cualquier número de conjuntos en  $\mathcal{T}$  pertenece a  $\mathcal{T}$ .
3. La intersección de un número finito de conjuntos en  $\mathcal{T}$  pertenece a  $\mathcal{T}$ .

Los elementos de  $\mathcal{T}$  se les llaman *conjuntos abiertos*, y el par  $(X, \mathcal{T})$  se dice que es un *espacio topológico*.

**Ejemplo 1.** Cada una de las colecciones

$$\mathcal{T}_1 = \{X, \emptyset, \{a\}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{T}_2 = \{X, \emptyset, \{b\}\}$$

es una topología sobre  $X = \{a, b, c\}$ . Sin embargo,  $\mathcal{T}_3 = \{X, \emptyset, \{a\}, \{b\}\}$  no es porque  $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \mathcal{T}_3$ .

Sea  $(X, \mathcal{T})$  un espacio topológico. Un subconjunto de  $X$  se dice que es *cerrado* si y sólo si su complemento pertenece a  $\mathcal{T}$ , es decir, su complemento es un conjunto abierto.

**Ejemplo 2.** En el espacio topológico  $(X, \mathcal{T}_1)$  del ejemplo anterior, el subconjunto  $E_1 = \{b, c\}$  es cerrado mientras el subconjunto  $E_2 = \{b\}$  no lo es.

Puede demostrarse que la intersección de cualquier número de conjuntos cerrados es cerrado, y que la unión de un número finito de conjuntos cerrados es cerrado.

Para probar que el conjunto  $\mathbb{P}$  de números primos es infinito, necesitamos hallar un espacio topológico apropiado. Tomamos  $X = \mathbb{Z}$ , el conjunto de los enteros. Para cualesquiera dos enteros  $a$  y  $b$ , con  $b$  positivo, sea

$$N_{a,b} \equiv \{a + nb : n \in \mathbb{Z}\} = \{a, a \pm b, a \pm 2b, \dots\}.$$

Definamos un conjunto  $E \subseteq \mathbb{Z}$  como *abierto* si es vacío, o para cada  $a \in E$  existe algún entero positivo  $b$  tal que  $N_{a,b} \subseteq E$ . Denotemos por  $\mathcal{T}$  la colección de todo conjunto abierto como se acaba de definir.

**Lema 3.** *El par  $(\mathbb{Z}, \mathcal{T})$  es un espacio topológico.*

*Demostración.* Primero notemos que  $\emptyset \in \mathcal{T}$  por definición. Sea  $\{E_i : i \in I\}$  una colección de conjuntos abiertos en  $\mathcal{T}$ , y sea  $a \in \bigcup_{i \in I} E_i$ . Entonces  $a \in E_{i_0}$  para algún  $i_0 \in I$ . Puesto que  $E_{i_0}$  es abierto, existe un entero positivo  $b$  tal que  $N_{a,b} \subseteq E_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} E_i$ . Por lo tanto,  $\bigcup_{i \in I} E_i$  también es abierto.

Supongamos ahora que  $E_1, E_2 \in \mathcal{T}$  y que  $a \in (E_1 \cap E_2)$ . Entonces existen enteros positivos  $b_1$  y  $b_2$  tales que  $N_{a,b_1} \subseteq E_1$  y  $N_{a,b_2} \subseteq E_2$ , respectivamente. Queremos demostrar que  $N_{a,b_1 b_2} \subseteq (E_1 \cap E_2)$ . Si  $x \in N_{a,b_1 b_2}$ , entonces para algún  $n \in \mathbb{Z}$  tenemos que

$$x = a + n(b_1 b_2) = a + (nb_2)b_1 = a + (nb_1)b_2$$

y por lo tanto  $x \in N_{a,b_1}$  y  $x \in N_{a,b_2}$ . Se sigue que  $x \in E_1$  y  $x \in E_2$ , o  $x \in (E_1 \cap E_2)$ . De ahí,  $E_1 \cap E_2$  también pertenece a  $\mathcal{T}$ .

**Lema 4.** *El conjunto  $N_{a,b}$  es ambos abierto y cerrado.*

*Demostración.* El conjunto  $N_{a,b}$  no es vacío puesto que  $a \in N_{a,b}$ . Sea  $x \in N_{a,b}$ . Se sigue que  $x = a + nb$  para algún  $n \in \mathbb{Z}$ . Demostraremos que

$N_{x,b} \subseteq N_{a,b}$ . Para cualquier  $y \in N_{x,b}$  tenemos que (para algún entero  $m$ )

$$y = x + mb = (a + nb) + mb = a + (m + n)b$$

y esto implica que  $y \in N_{a,b}$ . Entonces,  $N_{a,b}$  es un conjunto abierto.

No es difícil ver que

$$N_{a,b} = \mathbb{Z} \setminus \bigcup_{i=1}^{b-1} N_{a+i,b}.$$

Cada  $N_{a+i,b}$  es abierto como ya se ha demostrado, y por lo tanto la unión de estos conjuntos es abierto. Entonces, el conjunto del lado izquierdo es cerrado.

**Lema 5.** *Cualquier conjunto abierto no vacío es infinito.*

*Demostración.* La conclusión es una consecuencia directa de la definición de un conjunto abierto  $E$  ya que  $N_{a,b}$  es infinito y  $N_{a,b} \subseteq E$ .

**Lema 6.** *Se cumple que*

$$\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} = \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}. \quad (1)$$

*Demostración.* Cada  $x \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$  tiene un divisor primo  $p'$ , es decir,  $x = mp'$  para algún entero  $m$ . Esto implica que  $x \in N_{0,p'}$ , o que  $x \in \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$ . Entonces,  $\mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} \subseteq \bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p}$ . Un argumento semejante prueba que  $\bigcup_{p \in \mathbb{P}} N_{0,p} \subseteq \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\}$ .

**Teorema 7.** *El conjunto  $\mathbb{P}$  es infinito.*

*Demostración.* Si  $\mathbb{P}$  fuera finito, entonces el lado izquierdo de (1) sería cerrado puesto que es una unión finita de conjuntos cerrados (cada  $N_{0,p}$  es cerrado por el Lema 4). Se sigue que  $\{-1, 1\}$  es abierto. Pero esto es una contradicción ya que por el Lema 5 todo conjunto abierto no vacío tiene que ser infinito. Por lo tanto, hay una infinidad de números primos.

## Agradecimiento

Quiero agradecer al Dr. Guillermo Grabinsky por sus comentarios y sugerencias.

## Referencias

- [1] M. Aigner and G.M. Ziegler, *Proofs from The Book*, Springer-Verlag, 1998.
- [2] H. Furstenberg, *On the infinitude of primes*, Amer. Math. Monthly **62** (1955), p. 353.
- [3] P. Ribenboim, *The Little Big Book of Primes*, Springer-Verlag, 1991.